

Niech potencjał w punkcie $\mathbf{r}$ pochodzący od zbioru ładunków będzie dany wzorem:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}$$

gdzie w danym układzie współrzędnych położenie k -tego ładunku dane jest wektorem $\mathbf{R}_k$, wektor od ładunku do miejsca gdzie liczymy potencjał to $\mathbf{r}_k$ i wtedy $\mathbf{r}_k + \mathbf{R}_k = \mathbf{r}$, czyli $\mathbf{r}_k = \mathbf{r} - \mathbf{R}_k$. Niech kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{R}_k$ wynosi θ_k , to wtedy $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k = r R_k \cos(\theta_k)$. Korzystamy z wzoru cosinusów, czyli mamy, że:

$$r_k^2 = r^2 + R_k^2 - 2r R_k \cos(\theta_k) = r^2 \left[1 + \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) \right] = r^2 \left(1 + \left(\frac{R_k}{r} \right) \left[\left(\frac{R_k}{r} \right) - 2 \cos(\theta_k) \right] \right)$$

czyli inaczej:

$$r_k = r \sqrt{1 + \left(\frac{R_k}{r} \right) \left[\left(\frac{R_k}{r} \right) - 2 \cos(\theta_k) \right]} = r \sqrt{1 + \epsilon_k}$$

Jeśli teraz $r \gg R_k$ to może się zdarzyć, że ϵ_k będzie „małe” i można się pokusić o rozwinięcie każdej z funkcji r_k^{-1} w szereg względem ϵ_k :

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon_k)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon_k + \frac{3}{8} \epsilon_k^2 - \frac{5}{16} \epsilon_k^3 + \dots \right)$$

Potrzebujemy zatem podstawić tutaj kolejne potęgi ϵ_k . W wyprowadzeniach ograniczymy się do drugiej potęgi. Kolejno:

$$\epsilon_k = \left(\frac{R_k}{r} \right) \left[\left(\frac{R_k}{r} \right) - 2 \cos(\theta_k) \right] = \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_k^2 &= \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 \left[\left(\frac{R_k}{r} \right) - 2 \cos(\theta_k) \right]^2 = \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 \left[\left(\frac{R_k}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) + 4 \cos^2(\theta_k) \right] = \\ &= \left(\frac{R_k}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{R_k}{r} \right)^3 \cos(\theta_k) + 4 \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 \cos^2(\theta_k) \end{aligned}$$

Ponieważ interesują nas na razie jedynie potęgi do 2, to nie liczymy dalej bo w dalszych członach zawsze już wystąpi co najmniej człon $(R_k/r)^3$. Czyli podstawiamy i kolejno mnożymy nawiasy (człony w potęgach większych niż 2 nas nie interesują więc potem ich nawet nie piszemy) i grupujemy kolejno potęgami R_k/r (na koncu wyrzuciliśmy przy potędze drugiej współczynnik $\frac{1}{2}$ przed nawias):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_k} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_k}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{R_k}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{R_k}{r} \right)^3 \cos(\theta_k) + 4 \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 \cos^2(\theta_k) \right] + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 + \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) + \frac{3}{8} \left(\frac{R_k}{r} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_k}{r} \right)^3 \cos(\theta_k) + \frac{3}{2} \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 \cos^2(\theta_k) + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 (3 \cos^2(\theta_k) - 1) + \dots \right] \end{aligned}$$

Ostatecznie całkowity potencjał wygląda tak:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_k q_k \left[1 + \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 (3 \cos^2(\theta_k) - 1) + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sum_k q_k + \sum_k q_k \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) + \sum_k \frac{1}{2} q_k \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 (3 \cos^2(\theta_k) - 1) + \dots \right]\end{aligned}$$

Można to zapisać troszkę inaczej jako sumę kolejnych wykładów:

$$\varphi = \varphi_{\text{mono}} + \varphi_{\text{dip}} + \varphi_{\text{quad}} + \dots$$

gdzie kolejne człony są następujące:

$$\varphi_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_k q_k$$

$$\varphi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_k q_k \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k)$$

$$\varphi_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_k \frac{1}{2} q_k \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 (3 \cos^2(\theta_k) - 1)$$

Zajmijmy się członem dipolowym. Wiemy, że $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k = r R_k \cos(\theta_k)$ lub inaczej, że $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k)/r = R_k \cos(\theta_k)$. Widać zatem, że (poniżej wykorzystaliśmy, że iloczyn skalarny jest oczywiście przemienny):

$$\sum_k q_k \left(\frac{R_k}{r} \right) \cos(\theta_k) = \frac{1}{r} \sum_k q_k R_k \cos(\theta_k) = \frac{1}{r} \sum_k q_k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k}{r} = \frac{1}{r^2} \sum_k q_k (\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \left(\sum_k q_k \mathbf{R}_k \right) \cdot \mathbf{r}$$

Zdefiniujemy wektor $\boldsymbol{\mu}$ i nazwiemy go momentem dipolowym:

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_k q_k \mathbf{R}_k$$

Wtedy cały potencjał można zapisać jako:

$$\varphi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Zwrócimy jeszcze uwagę, że człon dipolowy możemy zapisać w postaci następującej:

$$\varphi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \sum_{\nu} \mu_{\nu} x_{\nu}$$

gdzie oczywiście składowe wektora momentu dipolowego dane są wzorem:

$$\mu_{\nu} = \sum_k q_k R_{k\nu}$$

Człon kwadrupolowy jest bardziej paskudny, ale będziemy chcieli postąpić podobnie, czyli znaleźć takie wyrażenie, które będzie zależało tylko od geometrii rozkładu ładunków i wstawione do wzoru da nam wkład kwadrupolowy do potencjału. Zapiszmy zatem:

$$\sum_k \frac{1}{2} q_k \left(\frac{R_k}{r} \right)^2 (3 \cos^2(\theta_k) - 1) = \frac{1}{r^2} \sum_k \frac{1}{2} q_k (3 R_k^2 \cos^2(\theta_k) - R_k^2) = \left(\frac{1}{r^2} \right)^2 \sum_k \frac{1}{2} q_k (3 R_k^2 r^2 \cos^2(\theta_k) - R_k^2 r^2)$$

Wstawiamy, że $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k)^2 = r^2 R_k^2 \cos^2(\theta_k)$ i otrzymamy, że wyrażenie przyjmie postać:

$$\frac{1}{r^4} \sum_k \frac{1}{2} q_k \left[3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k)^2 - R_k^2 r^2 \right]$$

Dalej wyciągamy królika z kapelusza. Zapisujemy, że iloczyn skalarny może być zapisany w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k &= \sum_{\mu} x_{\mu} R_{k\mu} \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_k)^2 &= \left(\sum_{\mu} x_{\mu} R_{k\mu} \right) \left(\sum_{\nu} x_{\nu} R_{k\nu} \right) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} R_{k\mu} R_{k\nu} x_{\mu} x_{\nu} \end{aligned}$$

Analogicznie można by zapisać, że $r^2 = \sum_{\mu} x_{\mu}^2$, ale nie będzie to produktywne. Zauważmy, że jeśli $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ to można zapisać sobie, że $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 0 \cdot (xy + xz + yz + yx + zx + zy)$. Patrząc na to z innej strony widzimy, że jeśli obliczymy $(x + y + z)^2$ i wyzerujemy człony mieszane to otrzymamy r^2 . Innymi słowy możemy wymnożyć każdą współrzędną z każdą i pomnożyć każdy wynik przez deltę Kroneckera, która wyzeruje nam człony mieszane. Ostatecznie widzimy, że

$$r^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} x_{\mu} x_{\nu} \delta_{\mu\nu}$$

Wyrażenie wygląda wtedy jak poniżej. W drugim kroku wyjęliśmy z nawiasów powtarzające się mnożenie pamiętając jednak cały czas o sumach. Na samym końcu zauważyliśmy, że możemy zamienić kolejność sum.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^4} \sum_k \frac{1}{2} q_k \left[3 \sum_{\mu} \sum_{\nu} R_{k\mu} R_{k\nu} x_{\mu} x_{\nu} - R_k^2 \sum_{\mu} \sum_{\nu} x_{\mu} x_{\nu} \delta_{\mu\nu} \right] &= \frac{1}{r^4} \sum_k \frac{1}{2} q_k \sum_{\mu} \sum_{\nu} [3 R_{k\mu} R_{k\nu} - R_k^2 \delta_{\mu\nu}] x_{\mu} x_{\nu} = \\ &= \frac{1}{r^4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left[\sum_k \frac{1}{2} q_k (3 R_{k\mu} R_{k\nu} - R_k^2 \delta_{\mu\nu}) \right] x_{\mu} x_{\nu} \end{aligned}$$

Ostatecznie widzimy, że wewnątrz nawiasu kwadratowego mamy twory zależne tylko od geometrii układu ładunków. Ostatecznie człon kwadrupolowy potencjału wygląda tak:

$$\varphi_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^5} \sum_{\mu} \sum_{\nu} Q_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$$

gdzie:

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_k q_k (3 R_{k\mu} R_{k\nu} - R_k^2 \delta_{\mu\nu})$$

Wszystkie twory $Q_{\mu\nu}$ łącznie nazywamy tensorem momentu kwadrupolowego, lub po prostu momentem kwadrupolowym i można oznaczyć np. $\hat{\mathbf{Q}}$. Widać, że jest to tensor symetryczny (tj. $Q_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$). Aby wykazać, że wartości $Q_{\mu\nu}$ tworzą tensor trzeba jeszcze sprawdzić ich własności transformacyjne, czego tutaj nie będziemy robić. Można również wykazać, że jest to tensor bezśladowy (tj. $\text{tr } \hat{\mathbf{Q}} = \sum_{\mu} Q_{\mu\mu} = 0$). Przykładowe wzory na składowe tensora wyglądają tak:

$$Q_{xx} = \frac{1}{2} \sum_k q_k (3 R_{kx}^2 - R_k^2)$$

$$Q_{xy} = \frac{3}{2} \sum_k q_k R_{kx} R_{ky}$$

Podsumowując ostatecznie, można wszystkie wzory napisać w sposób jednorodny w postaci:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(\sum_k q_k \right) + \frac{1}{r^3} \sum_{\nu} \left(\sum_k q_k R_{k\nu} \right) x_{\nu} + \frac{1}{r^5} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(\frac{1}{2} \sum_k q_k [3R_{k\mu} R_{k\nu} - R_k^2 \delta_{\mu\nu}] \right) x_{\mu} x_{\nu} + \dots \right]$$