

Dodatek matematyczny

Granica ciągu

Bardzo ważne i istotne będą dla nas na samym początku granice ciągów. Przypomnijmy sobie, że ciąg jest to po prostu funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich (tj. $\mathbb{N}_+$)¹ a przeciwdziedziną może być w zasadzie cokolwiek (np. jakiś podzbiór liczb rzeczywistych). Ciągi mogą być różne (np. funkcyjne), ale nas tutaj będą interesować te najprostsze, gdzie wartościami będą po prostu liczby (czyli ciągi liczbowe).

Ciąg można określić z reguły jakimś wzorem, podając wyrażenie algebraiczne określające jego wyrazy. Jest to znacznie prostsze i wygodniejsze niż podawać kolejne jego elementy. I tak np. prosty ciąg o następujących wyrazach

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots,$$

można zapisać po prostu jako

$$a_n = \frac{1}{n},$$

gdzie to małe n jest właśnie kolejną liczbą naturalną dodatnią (czyli kolejno $1, 2, 3, 4, \dots$).

Oczywiście, ciągi mogą być naprawdę różne (wyobraźnia nie zna granic²). Kolejny wyraz ciągu numerowany za pomocą n wcale nie musi zależeć od n . I tak np. mamy ciąg

$$a_n = 1,$$

gdzie każdy wyraz jest równy 1. A mogą być i inne ciekawsze przypadki. Ot np. taki ciąg

$$a_n = (-1)^n.$$

Gdyby wypisać kolejne jego wyrazy to widać, że będą to przemienne 1 i -1 :

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

Jesteśmy już gotowi przejść do granic ciągów. Zauważmy, że podane powyżej ciągi znacznie się między sobą różnią. Dwa ostatnie są albo stałe ($a_n = 1$), albo ich wartości „oscylują” pomiędzy dwiema dozwolonymi ($a_n = (-1)^n$). Natomiast pierwszy ciąg ($a_n = \frac{1}{n}$) jest nieco inny. Jego wartościami są przede wszystkim liczby wymierne. Każda kolejna jest też coraz mniejsza. Ale nie tylko to. Im większe jest n tym wartości są bliższe zeru, ale zawsze (i to jest ważne) nigdy tego zera nie osiągną. W takim przypadku powiemy, że granicą tego ciągu jest właśnie 0. Nie jest naszym celem podawać tutaj formalnej definicji granicy ciągu, ale „widać”, że wartość zero jest intuicyjnie zgodna z naszym jakimś takim przeświadczeniem, że jest to „granica”, której nigdy nie osiągniemy, ale do której się coraz bardziej zbliżamy zwiększając liczbę n . Bardziej formalną definicję, uwzględniającą różne przypadki (nierzadko tzw. patologiczne), można znaleźć w podręcznikach matematyki. Jak dostatecznie jednak głęboko się zastanowimy nad tym co jest powyżej napisane to zauważymy, że formalna definicja wcale potem nie będzie taka straszna. Zauważmy, że granicą jest liczba 0 (to znowu „widać”). Ale dlaczego nie może być to np. liczba 0.0000001? Ano dlatego, że wymyśliliśmy sobie, że granicy nigdy nie osiągniemy. A gdyby wziąć odpowiednio duże n to znajdziemy liczbę mniejszą.³ I tak będzie dla

¹ Czyli zaczynamy od 1. Innymi słowy $\mathbb{N}_+$ jest to $\mathbb{N}$ bez zera.

² O ironio, chcemy mówić o granicach!

³ Istotnie. Można to sprawdzić na kalkulatorze, że dla $n = 10000001$ mamy $a_n = 0.00000009999999$ co jest mniejsze niż 0.0000001.

każdej innej dodatniej (to chyba tu oczywiste) wymyślonej liczby większej od zera. Mówiąc nieściśle możemy się do granicy zbliżyć nieskończenie blisko, ale nigdy jej nie osiągniemy.⁴ I to jest sens całej formalnej definicji: nie ważne jak duże n weźmiemy to nigdy granicy nie osiągniemy, ale będziemy się do niej zbliżać.

Ciągi, które mają granice nazywamy zbieżnymi. Ciągi, które ich nie mają rozbieżnymi. Przykładem rozbieżnego ciągu jest np. taki twór:

$$a_n = n^2.$$

Widać, że każdy kolejny wyraz jest coraz większy. Nie będą się wyrazy zbliżać do jakiegokolwiek liczby, więc ciąg jest rozbieżny.

Interesować nas będzie jak granice ciągów znajdować. Na sam początek zdefiniujmy język jakim będziemy się dalej posługiwać. Jeśli dany jest ciąg o wyrazach a_n i ma on granicę g (podkreślmy, jest to po prostu liczba) to będziemy pisać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Warto podać przykład takiego zapisu. Dla naszego prostego ciągu wygląda on tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Przy znajdowaniu granic natomiast to czasami „widać”. Tak jak w przypadku tych ciągów:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

granice wynoszą oczywiście odpowiednio 0 i 2. Po prostu takie „ogony” jak $\frac{1}{n}$ i podobne będą znikać w granicy „nieskończonych” n . Czasami trzeba porobić różne przekształcenia algebraiczne aby to zauważyć. Przykładowo ciąg

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - n} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)}$$

ma granicę równą

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Więcej trudnych i dziwnych przykładów można znaleźć w podręcznikach lub zbiorach zadań z matematyki.

Na sam koniec powiemy, że czasami względnie trudną sprawą jest wykazać czy ciąg jest zbieżny czy nie. Np. taki oto ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nie wygląda na pierwszy rzut oka jak zbieżny lub rozbieżny. „Ogon” $\frac{1}{n}$ wewnątrz nawiasu maleje, ale cała potęga n rośnie. Otóż okazuje się, że ten ciąg jest zbieżny⁵ i jest w matematyce bardzo ważną stałą:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$$

Stała ta odgrywa podobną rolę jak słynna liczba π .

⁴ Tu wymagane jest wyjaśnienie. Oczywiście ciąg $a_n = 1$ też ma granicę i jest ona równa 1. Także w pewnych przypadkach można granicę osiągnąć. Formalna definicja takie przypadki też uwzględnia.

⁵ Sam autor tego skryptu dalej uważa to za zadziwiające.