

Dodatek matematyczny

Równanie kwadratowe

Niech dane będzie równanie kwadratowe ogólnej postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Aby to równanie rozwiązać przekształcamy je do następującej postaci aby pozbyć się literki a w pierwszym wyrazie i przenosimy ostatni wyraz na prawą stronę:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Następnym krokiem jest zastosowanie sztuczki, która pozwoli na zastosowanie wzoru najmniejszych kwadratów po lewej stronie. Jeśli zauważymy, że $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ to widać, że po obu stronach równania należy dodać właśnie wyraz $b^2/4a^2$, tj.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Stosując wspomniany wzór najmniejszych kwadratów otrzymamy, że (po prawej stronie sprowadziliśmy wszystko do wspólnego mianownika)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tak otrzymane równanie pierwiastkujemy, pamiętając, że mamy dwa rozwiązania, dodatnie i ujemne. Czyli:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ostatecznie zapisujemy wzór na oba rozwiązania równania kwadratowego w postaci:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Warto wspomnieć, że wyrażenie pod pierwiastkiem nazywamy często wyróżnikiem równania kwadratowego i oznaczamy symbolem $\Delta = b^2 - 4ac$ (stąd popularna nazwa, że liczymy „deltę”).