

Dodatek matematyczny

Kilka wybranych sum

Interesować nas będą sumy postaci

$$S_n^m = \sum_{k=1}^n k^m,$$

gdzie liczby n i m są liczbami naturalnymi. Dla kilku kolejnych m sumy te wyglądają następująco:

$$S_n^0 = \sum_{k=1}^n 1,$$

$$S_n^1 = \sum_{k=1}^n k,$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

i tak dalej. Pierwsza suma jest oczywista, bo to po prostu suma n jedynek, czyli $1 + 1 + \dots + 1$, a to jest po prostu równe n . Mamy zatem oczywisty wzorek, że

$$S_n^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Na samym początku zrobimy dygresję na temat tzw. sum teleskopowych. Będą nas interesowały tylko sumy skończone. Takie skończone sumy teleskopowe są postaci

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}).$$

gdzie a_k są k -tymi wyrazami jakiegoś ciągu $(a_0, a_1, \dots)$. Nietrudno zauważyć, że wypisując kolejne elementy takiej sumy wyrazy po środku się skasują i zostaniemy po prostu z wyrazami krańcowymi,¹ czyli

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

Przydatnym tutaj przykładem takiej sumy będzie taka gdzie $a_k = k^m$. Wyrazy krańcowe dla $k = n$ i $k = 0$ będą równe odpowiednio $a_n = n^m$ i $a_0 = 0^m = 0$. W takim przypadku następująca suma teleskopowa będzie równa

$$\sum_{k=1}^n [k^m - (k-1)^m] = n^m.$$

Na tym kończymy dygresję i idziemy dalej.

Gdzie powyższe sumy teleskopowe mogą być nam przydatne? Rozpatrzmy prosty przykład. Chcemy obliczyć coś takiego jak $(k-1)^2$ korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.² Mamy oczywiście, że

$$(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1.$$

¹ Zaiste, bo

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = (\textcolor{red}{a}_1 - a_0) + (\textcolor{blue}{a}_2 - \textcolor{red}{a}_1) + (a_3 - \textcolor{blue}{a}_2) + \dots$$

i chyba widać, że wyrazy na czerwono i niebiesko się po prostu skracają w środku.

² Widać chyba, że to $(k-1)^2$ jest takie jak we wzorku teleskopowym dla $m = 2$.

Przeniesiemy sobie wyrazy z kwadratami na jedną stronę.³ Otrzymamy

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1.$$

Jeśli teraz obie strony wysumujemy od $k = 1$ to n to otrzymamy, że

$$\sum_{k=1}^n [k^2 - (k-1)^2] = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

gdzie widać, że po lewej stronie mamy rozpatrywany wzór teleskopowy dla $m = 2$. Jeśli tak, to od razu można zapisać, że lewa strona to jest po prostu n^2 (chyba widać, że wystarczy podstawić do wzoru teleskopowego $m = 2$). Prawą stronę rozbijamy na kilka sum

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1.$$

Pierwsza z nich to szukana suma S_n^1 , a druga to już znana nam suma jedynek $S_n^0 = n$. Ostatecznie mamy, że

$$n^2 = 2S_n^1 - n$$

czyli

$$S_n^1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Obliczmy teraz jeszcze sumę S_n^2 . Postępujemy podobnie, czyli wykorzystamy wzór teleskopowy dla $m = 3$, wychodząc ze wzoru na sześciąt $k - 1$. Mamy kolejno, że

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1.$$

Robimy to samo co poprzednio, tylko, że dla sześciątów. Przenosimy sześciąty na lewą stronę i sumujemy po k . Mamy

$$\sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

Po lewej stronie zauważamy wzór teleskopowy dla $m = 3$, a po prawej stronie identyfikujemy sumę szukaną ($S_n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$), poprzednio policzoną sumę $S_n^1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ i też sumę jedynek S_n^0 . Otrzymujemy z tego, że

$$n^3 = 3S_n^2 - \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

Troszkę algebry⁴ daje finalny wzorek postaci,

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

³ $(k-1)^2$ na prawo, $-2k+1$ na lewo, a potem przepiszemy obie strony odwrotnie.

⁴ Po przeniesieniu stronami, pomnożeniu przez 2, wyciągnięciu n itp. otrzymamy, że $6S_n^2 = n^3 + 3n(n+2) - 2n = n(2n^2 + 3n + 1)$. Dalej to już trzeba (chyba magicznie) zgadnąć lub zauważyć, że wyrażenie w nawiasie jest równe $(n+1)(2n+1)$.