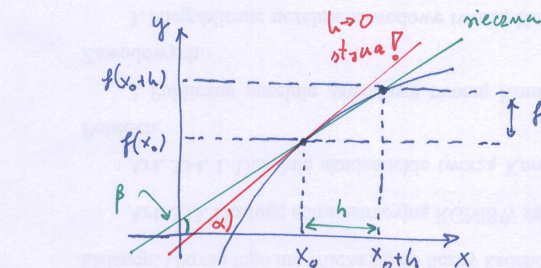


# Zad. 1.1

Pochodna jako granica funkcji, konkretnie ilorazu różnicowego.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jak ten przedmiot czasem interpretacja graficzna.



$$\tan \beta = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

tangen kąt nachylenia niewielki

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \tan \alpha$$

pochodna = tangens kąta nachylenia stycznej

wsp. w punkcie  $x_0$  dla wygody

(a)  $\bullet x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Ogólny wzór dla dowolnej potęgi (tej rzeczywistej):

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\bullet \sin x$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

wzór z tabeli

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

jest twierdzenie, które z tabeli, że

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{tzn. dla} \\ \text{małych } \alpha \end{array} \right)$$



Ogólne podane dla dowolnej i p. arbi.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

•  $\log_a x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \stackrel{\text{zwyczaj}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \log_a \left[ \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right] \right) = \end{aligned}$$

Mozna teraz sobie zamienić  $h \rightarrow 0$  na  $n \rightarrow \infty$ , dla dowolnego  $x$ , czyli  $\frac{h}{x} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{n}{x}$  i otrzymamy

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log_a \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{x}} \right] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \log_a \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\left( \frac{1}{x} \right)} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_a \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \frac{1}{x} \log_a \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \frac{1}{x} \log_a e \end{aligned}$$

można tak

to prawie istnie  
i oznaczają  $e \approx 2.718$   
(bardzo ważna liczba)

Szycielko przypadek to  $a = e$ , wtedy  $\log_e = \ln$  (logarytm naturalny)

i mamy, że

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$



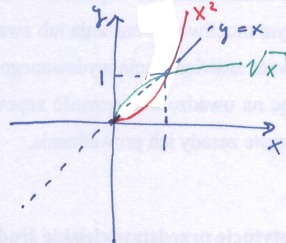
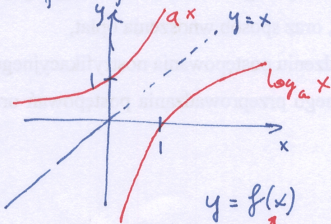
$$(6) \cdot \frac{d}{dx}(4x^4 + 5x - 2\sin x) =$$

$$= \frac{d}{dx}(4x^4) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(2\sin x) =$$

$$= 4 \underbrace{\frac{d}{dx}(x^4)}_{4x^3} + 5 \underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_1 - 2 \underbrace{\frac{d}{dx}(\sin x)}_{\cos x} = 16x^3 + 5 - 2\cos x$$

•  $a^x$

Konstanta: funkcje odwrotne (miejscami - odwrócone względem  $y=x$ )



$y = f(x)$   
 $x = f(y)$  i wyliczyć  $y = f^{-1}(x)$

Pochodna funkcji odwrotnej to odwrotność pochodnej. Jestli mamy  $y = f(x)$  to liczymy  $x = f^{-1}(y)$  i liczymy pochodną  $\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy}$ , podstawiamy potem w tożsamość za  $x$  i odwracamy.

$$y(x) = a^x \Rightarrow x(y) = \log_a y$$

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(\log_a y) = \frac{1}{y} \underbrace{\log_a e}_{\text{konstanta}} = \frac{1}{a^x} \log_a e$$

pochodna  $\frac{df^{-1}}{dy}$  i teraz odwracamy

$$\frac{dy(x)}{dx} = \left( \frac{dx(y)}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{a^x} \log_a e} = \left[ \frac{a^x}{\log_a e} = \frac{d}{dx}(a^x) \right]$$

szukamy pochodnej

Stwierdzenie przypadek to  $a=e$ , wtedy  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

najprostsza pochodna!



$$\bullet \frac{d}{dx} \left( 3e^x [\ln x + \sin(x^5+2)] \right) =$$

$$= \frac{d}{dx} (3e^x) \cdot [\ln x + \sin(x^5+2)] + 3e^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln x + \sin(x^5+2)] =$$

$$= 3e^x \cdot [\ln x + \sin(x^5+2)] + 3e^x \left[ \frac{d}{dx} (\ln x) + \frac{d}{dx} (\sin(x^5+2)) \right] =$$

$$= 3e^x \cdot [\ln x + \sin(x^5+2)] + 3e^x \left[ \frac{1}{x} + \cos(x^5+2) \cdot \frac{d}{dx} (x^5+2) \right] =$$

$$= 3e^x \left[ \ln x + \frac{1}{x} + \sin(x^5+2) + 5x^4 \cos(x^5+2) \right]$$

1. Wzór na iloczyn:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2. Podwójne funkcji złożonej

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

jakby g było argumentem

funkcja z cosina