

Zad. 1.2

Całkowanie nieoznaczone to szukanie funkcji pierwotnej:

$$F' = f \quad \text{lub} \quad \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx \quad \text{i tyle!}$$

Funkcje pierwotne (różne) będą na równi o stałą C , aże
to będziemy pamiętać z reguły: $G = F + C$

$$G' = (F + C)' = F' \quad (\text{bo } C' = 0)$$

Jak znamy wzory na pochodne, to wystarczy je „odwrócić”!

(a) $\cdot x^\alpha$

$$\frac{d}{dx}(x^\beta) = \beta x^{\beta-1}$$

$$\int \frac{d}{dx}(x^\beta) dx = \int \beta x^{\beta-1} dx$$

x^β
Całkow. z podwyj.

$$\beta \int x^{\beta-1} dx = x^\beta$$

$$\int x^{\beta-1} dx = \frac{x^\beta}{\beta}$$

wolimy jawnie α
 $\alpha = \beta - 1 \Rightarrow \beta = \alpha + 1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

(dla $\alpha \neq -1$!)

↓ dla $\alpha = -1$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Dużo twierdzi
jest podobny
(np. stała przed
całkow. itp.)

↑↑!
Jaki $F' = f$ to
 $\int F' = \int f = F$ o jest
formuła: całkow.
z pochodnej to ta
funkcja (z dodatk. stał.)

Konstanty: ogólnie pochodna
zmniejsza potęgę, całkow.
zwiększa potęgę

Podsumowanie wzorów:

funkcja $f(x)$	podstawa $\frac{df}{dx}(x)$	całkowicie $\int f(x) dx$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ (dla $\alpha \neq -1$) $\ln x$ (dla $\alpha = -1$)
$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$	$-\cos x$ $\sin x$
a^x (e^x)	$\frac{a^x}{\log_a e}$ (e^x) najprostsza podstawa	$\frac{a^x}{\ln a}$ (e^x) najprostsza całka
$\log_a x$ $(\ln x)$	$\frac{1}{x} \log_a e$ $(\frac{1}{x})$	$\frac{x \ln x - x}{\ln a}$ ← ta całka nam może potrafić... $(x \ln x - x)$

Wszystkie wzory w tabelce...

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 4e^x - 6 \cos x + 1) dx &= 2 \int x^2 dx + 4 \int e^x dx - 6 \int \cos x dx + \int dx = \\ &= \frac{2}{3} x^3 + 4e^x - 6 \sin x + x \quad (+ \text{ew. stała}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \int y dy = \\ &\text{podstawienie } y = \ln x \\ &dy = \frac{1}{x} \cdot dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

↑
 $\ln x$

Całkowanie przez podstawienie:

1. $y = f(x)$ - podstawiamy
2. liczymy pochodną $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
 $dy = f'(x) dx$
3. liczymy całkę
4. wracamy z podstawieniem.

$$\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} f = e^x \\ f' = e^x \\ g = x^2 \\ g' = 2x \end{array} \right\} =$$

- wy bierz wiary !

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = e^x \\ f' = e^x \\ g = x \\ g' = 1 \end{array} \right\}$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

Całkowanie przez części.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$

f g

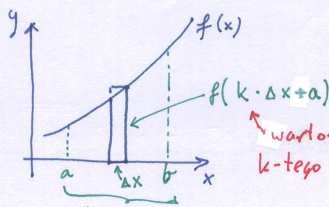
$$\int f'g = fg - \int fg'$$

możesz prostować...

(6) Całkowanie oznaczone to jest coś innego ! Polega ono na (miej więcej) sumowaniu bardzo dużej liczby (nieskończonej) bardzo małych (niekończących się) kawałeczków. Jest to mamy przechył $[a, b]$ to całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ możemy rozumieć jako :

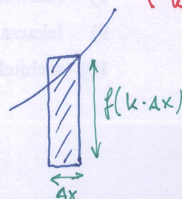
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(k \cdot \frac{b-a}{n} + a\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

suma Riemanna



podzielone na n małych kawałków, każdy o szerokości

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$



Całka to granica sumy Riemanna przy $n \rightarrow \infty$ aby "wyglądać" pole

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k \cdot \Delta x + a) \cdot \Delta x \right)$$

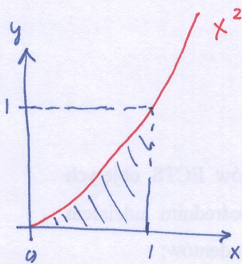
całka to suma

dx to nieskończenie małe Δx

Suma Riemanna R_n

to suma tych "pól" pola mogą być ujemne

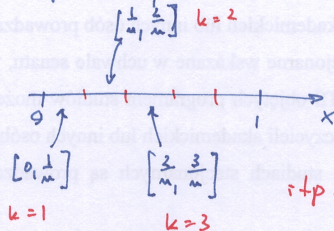
-4-



1. Mamy przedział $[0, 1]$

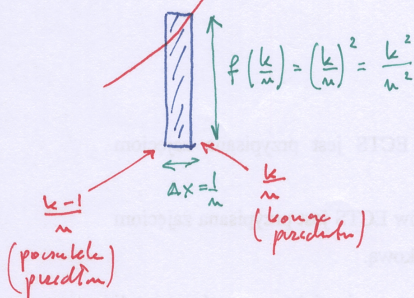
2. Dzielimy go na n równych kawałków o szerokości $\Delta x = \frac{1}{n}$

3. Numeryczny przedział



ogólnie k -ty przedział $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$

4. Liczymy pole małego kawałka $f(x) = x^2$



$$\Rightarrow \text{pole} = f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \Delta x = \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k^2}{n^3}$$

Wzór 2 tablicy

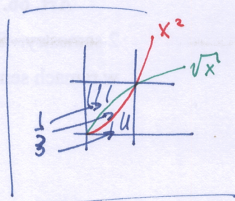
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Liczymy sumę Riemanna

$$R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

6. Liczymy całkę

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}$$



Ogromnie miło normalnie tak we łże liri ciele. Jest
magia twarda, letne Tay celi omawia i uczuwano

Jeli $F' = f$ celi $\int f(x) dx = F(x)$ $\left(\begin{array}{l} \text{calka} \\ \text{nieoznaczone} \\ \text{funkcja} \\ \text{przewrotna} \end{array} \right)$

to wtedy:

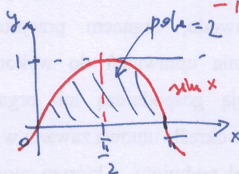
$\left(\begin{array}{l} \text{calka} \\ \text{oznaczona} \end{array} \right) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{ozn.}}{=} F(x) \Big|_a^b$ **!!!**

przekladem

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$ 24 ADRA SWE 15

bo $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$

(c) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$



$\int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (y-1) \sqrt{y} dy =$

$\begin{cases} y = x+1 \\ x = y-1 \\ dy = dx \end{cases}$

granice

x	y
-1	0
0	1

$= \int_0^1 (y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) dy = \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy - \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy =$

$= \left(\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{4}{15}$

Przy podstawieniu
 zmieniy's roz
 odpowiedz granice
 autowarta !