

Zad. 1.5

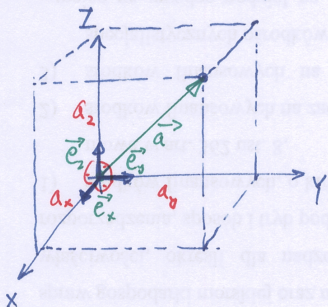
-1-

Wektory w 2D lub 3D będziemy oznaczać za pomocą współrzędnych jako macierze kolumnowe. Np. w 3D:

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

5. jme
skalowy
wektor
tenzory

Taki wektor wygląda tak:



Wzrost współrzędnych kartezjańskich
(X, Y, Z)

↑ owe

Wektory jednostkowe (bazy) dla tego składowego

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$$

długość = 1 !

Cały wektor $\vec{a}$ w takim zapisie to:

$$\vec{a} = \underbrace{a_x}_{\text{składowe}} \underbrace{\vec{e}_x}_{\text{składowe}} + \underbrace{a_y}_{\text{składowe}} \underbrace{\vec{e}_y}_{\text{składowe}} + \underbrace{a_z}_{\text{składowe}} \underbrace{\vec{e}_z}_{\text{składowe}} = [a_x, a_y, a_z] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Długość wektora liczymy z tw. Pitagorasa:

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

↑ długość (lub ogólna norma)
↑ to prosty przepis to skalar = LICZBA !

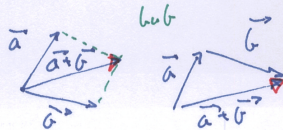
$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Dodawanie wektorów (musisz mieć w formie te same jednostki i być za siebie w tym samym miejscu)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

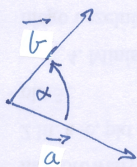
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{bmatrix}$$



Mnożenie wektorowe:

- skalarne (wynik to LICZBA)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

(to LICZBA, kolejność NIE ma znaczenia: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$)
zaumy, że jak $\vec{a} \perp \vec{b}$ to $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
!!!

$$\text{jeśli } \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

$$\text{to: } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) =$$

$$= a_x b_x (\underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{\substack{\text{każde puzer każe jak liczyć...} \\ \text{"1"}}}) + a_y b_y (\underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y}_{\substack{\text{"1"}}}) + a_z b_z (\underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{\substack{\text{"1"}}}) + \text{ozłomy} = \text{mierzalne}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

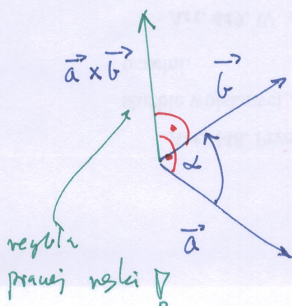
2-prz macierzy:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

wierz!
(wypróbowaj)

- wektor (wynik to WEKTOR)



$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \sin \alpha \quad (\text{długość wektora } \vec{a} \times \vec{b})$$

zaumy, że jeśli $\vec{a} \parallel \vec{b}$ to $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$!!!

wynik to WEKTOR, kolejność MA znaczenie:

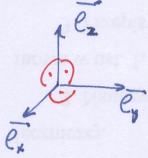
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{pamiętaj:} \\ -\vec{a} \times \vec{b} \end{array} \right|$$

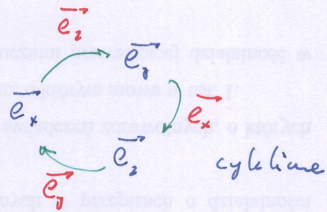
to bierzemy:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = \\ &= a_x b_x (\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + \text{inne jednostkowe} + \\ &+ a_x b_y (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) + a_y b_x (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_y b_z (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) + \\ &+ a_z b_x (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \times \vec{e}_y) =\end{aligned}$$

dygresja - właściwe wzory



$$\begin{aligned}\vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z = \\ &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Oczywiście mielibyśmy mieć jeszcze tego parametra...

Rozpatrzmy taki „mieszany” wyznacznik.

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \text{— to du w wyznaczniku powyżej! 😊}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad a = \|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$b = \|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

(b)

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} \quad \leftarrow \text{to long druga metoda} : \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$$

to mamy z (a)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{420}} \approx \frac{1}{20} \Rightarrow \alpha \approx 87^\circ$$

$$\begin{cases} \text{gdz } b_y = b \\ b_z = -4 \\ \text{to } \alpha = 90^\circ \text{ (:) } \end{cases}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

metoda

Sarrusa

Czy jest dobrze to można sprawdzić licząc iloczyn skalarny, bo dla wektorów $\perp$ jest zero. Np.

$$\begin{bmatrix} -17 & 9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = (-17) \cdot 2 + 9 \cdot 3 + (-7) \cdot (-1) = -34 + 27 + 7 = 0$$

OK!