

Zad. 1.6

-1-

$$(a) \quad ① \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = \boxed{2}$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = \boxed{3}$$

$$② \quad x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = \boxed{2}$$

lub

 $\Downarrow$

$$x = \pm 2$$

$$x_2 = \boxed{-2}$$

$$③ \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \dots \text{ jest problem } \dots \sqrt{-1} = ? \notin \mathbb{R}$$

omawiajmy teraz, że jest to tzw. jednostka urojona (imaginar)

$i = \sqrt{-1}$ i traktujmy ją „inaczej” niż „NIE” rzeczywistą.

$i^2 = -1$ i linijny dalej...

$$\boxed{x = \pm i}$$

$$④ \quad x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \underbrace{\sqrt{-1}}_i \sqrt{4} = 2i$$

$$x_1 = \frac{4-2i}{2} = \boxed{2-i}$$

$$x_2 = \frac{4+2i}{2} = \boxed{2+i}$$

↑
↑
parzysty liść zespolony $a+bi$

$$(6) \quad z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 - 4i$$

(trochę jak
wektor)

$$① \quad z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 - 4i) = 1 + 3 + (2 - 4)i = 4 - 2i$$

$$② \quad z_1 z_2 = (1 + 2i)(3 - 4i) = \underbrace{1 \cdot 3}_{3} - \underbrace{1 \cdot 4i}_{-4i} + \underbrace{2i \cdot 3}_{6i} - \underbrace{2i \cdot 4i}_{8} =$$

$$= 3 - 4i + 6i + 8 =$$

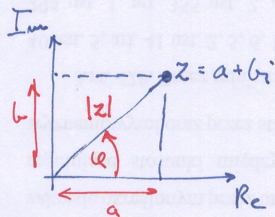
$$= 11 + 2i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$③ \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{9 + 12i - 12i + 16} = \frac{-5 + 10i}{24} =$$

$$= -\frac{5}{24} + \frac{5}{12}i$$

(c) Liczby zespolone można narysować na płaszczyźnie zespolonej (Argandua)



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ - moduł liczby } z$$

$$\varphi \text{ - kąt liczby } z$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$$

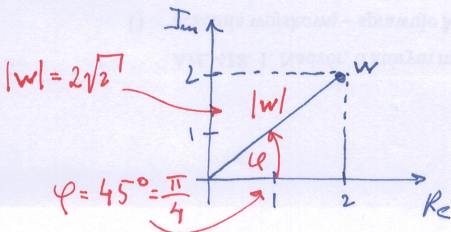
$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$$

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

potrzebujemy trygonometrii

Jest wygodny wzór Eulera: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \Rightarrow z = |z| e^{i\varphi}$
potrzebujemy trygonometrii

$$w = 2(1 + i) = 2 + 2i$$



$$w = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= |w| e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$