

01/11/2022

Elementy mechaniki

Semestr I (zimowy) 2021/2022

Chemiczna Analiza Instrumentalna

Uniwersytet Warszawski

Proseminarium – Seria 1

Tydzień 1, 2

Wstęp matematyczny

Zagadnienia przygotowawcze

Przypomnij sobie obliczanie granic ciągów i funkcji. Przypomnij sobie definicję pochodnej funkcji jednej zmiennej (bardzo ważne!). Zapoznaj się, w miarę możliwości (może znajdziesz w internecie lub jakiejs książce), z jakąś (prostą!) definicją całki nieoznaczonej i oznaczonej. Zastanów się co to mogą być równania różniczkowe. Jeśli w szkole były wyznaczniki, to pomyśl co to mogą być macierze i jakie mogą być dozwolone operacje na nich. Przypomnij sobie ze szkoły wektory (w geometrii) i pomyśl jak można je opisać i co można z nimi robić. Przypomnij sobie rozwiązywanie prostych układów równań (np. układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi). Zakłada się, że każdy umie rozwiązać proste równanie kwadratowe; spróbuj w domu rozwiązać równanie: $x^2 + 4 = 0$.

Uzasadnienie doboru materiału

Wstęp matematyczny zawiera elementy niezbędne w dalszym kursie podstaw fizyki. Na początku pokazane są pochodne funkcji (jednej zmiennej) ze szczególnym uwzględnieniem punkcji potęgowej, prostych funkcji trygonometrycznych i najważniejsze funkcji logarytmicznej i wykładniczej (szczególnie e^x) i różniczkowaniem funkcji złożonej i iloczynu funkcji. Następnie pokazane są całki nieoznaczone i student zaznajamia się wstępnie z różnymi technikami całkowania (całkowanie przez podstawienie i przez części). Następnym etapem są całki oznaczone, które wpierw liczymy z (uproszczonej) definicji, a potem pokazujemy, że można je obliczyć wykorzystując do tego celu całki nieoznaczone. W fizyce często pojawiają się równania różniczkowe. Tutaj pokazujemy proste równania różniczkowe 1-ego rzędu i pokazujemy, że da się je prosto rozwiązywać. Praktycznie przez większość kursu będziemy posługiwać się wektorami. W tym celu na początku wprowadzamy macierze i uczymy się je mnożyć, a potem wektory, gdzie używamy zapisu macierzowego. Na sam koniec wprowadzamy liczby zespolone. Pokazujemy, że za ich pomocą umiemy rozwiązać już każde równanie kwadratowe i ćwiczymy operacje na nich. Zwracamy uwagę, że liczby zespolone można zapisać w różnej postaci, co będzie potem potrzebne do rozwiązywania równań różniczkowych np. związanych z ruchem oscylacyjnym i innymi procesami periodycznymi.

Zadanie 1.1 (pochodne)

(a) Oblicz pochodne następujących funkcji korzystając z definicji:

- x^2
- $\sin x$
- $\log_a x$

(b) Oblicz pochodne następujących funkcji:

- $4x^4 + 5x - 2 \sin x$
- a^x
- $3e^x [\ln x + \sin(x^5 + 2)]$

Zadanie 1.2 (*całki*)

(a) Oblicz całki nieoznaczone następujących funkcji:

- x^α
- $2x^2 + 4e^x - 6 \cos x + 1$
- $\frac{\ln x}{x}$
- $x^2 e^x$

(b) Oblicz całkę oznaczoną korzystając z (uproszczonej) definicji (za pomocą sum Riemmana):

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

(c) Oblicz następujące całki oznaczone:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx \qquad \int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} \, dx$$

Zadanie 1.3 (*równania różniczkowe*)

Rozwiąż następujące równania różniczkowe (szukaną funkcją jest $y(x)$):

- $y' = x^2$
- $y' = y^2$
- $x^2 y' = y$

Zadanie 1.4 (*macierze*)

(a) Pomnóż następujące macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(b) Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Zadanie 1.5 (*wektory*)

Dane są wektory $\mathbf{a} = [2, 3, -1]$ i $\mathbf{b} = [1, -2, -5]$.

- (a) Oblicz długości wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.
- (b) Znajdź wektory $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ i $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- (c) Oblicz kąt (lub jego cosinus) pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.
- (d) Oblicz iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Wykaż, że wynikowy wektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Zadanie 1.6 (*liczby zespolone*)

(a) Rozwiąż następujące równania algebraiczne:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^2 - 4 = 0$
- $x^2 + 1 = 0$
- $x^2 - 4x + 5 = 0$

(b) Dane są liczby zespolone $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 3 - 4i$. Wykonaj działania:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 \cdot z_2$
- z_1 / z_2

(c) Przedstaw liczbę $w = 2(1 + i)$ w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.