

Ciekawostki dnia – 21 października



1956 – Władysław Gomułka został I sekretarzem KC PZPR, zastępując na tym stanowisku Edwarda Ochaba.



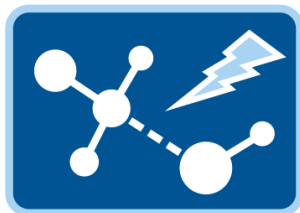
2004 – Przywódca Kuby Fidel Castro złamał nogę przewracając się po wygłoszeniu przemówienia w Santa Clara.



1918 – Włodzimierz Lenin (wiecznie żywy ↑) powołał Główny Zarząd Wywiadowczy (GRU).



Grupa Badawcza
Dynamiki Strukturalnej



photocrystallography.eu

ELEMENTY MECHANIKI

Chemiczna Analiza Instrumentalna

2021/2022

WYKŁAD 3

dr inż. **Radosław KAMIŃSKI**

(rkaminski85@uw.edu.pl)

dr hab. **Katarzyna N. JARZEMBSKA**

(katarzyna.jarzemska@uw.edu.pl)

Gmach Radiochemii, pok. 109a

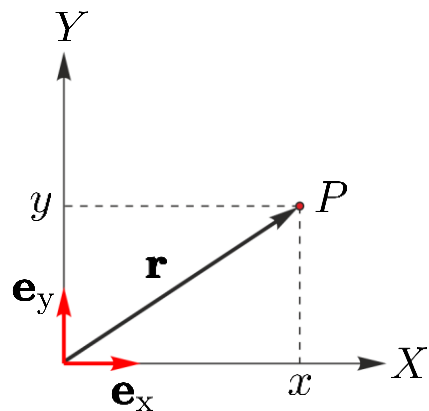
Wydział Chemii, Uniwersytet Warszawski
ul. Żwirki i Wigury 101, 02-093 Warszawa



Układ biegunowy

Definicja układu

układ kartezjański (w 2D)



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y$$

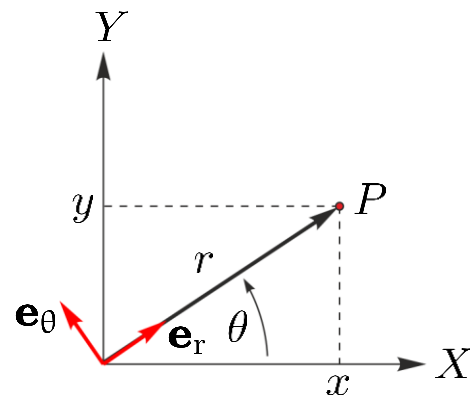
„(położenie, położenie)”



transformacja wektorów bazowych

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

układ **biegunowy** (tylko w 2D)
(ang. polar coordinate system)



„(odległość, kąt)”

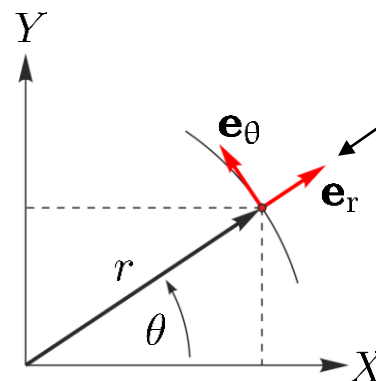
transformacja współrzędnych

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

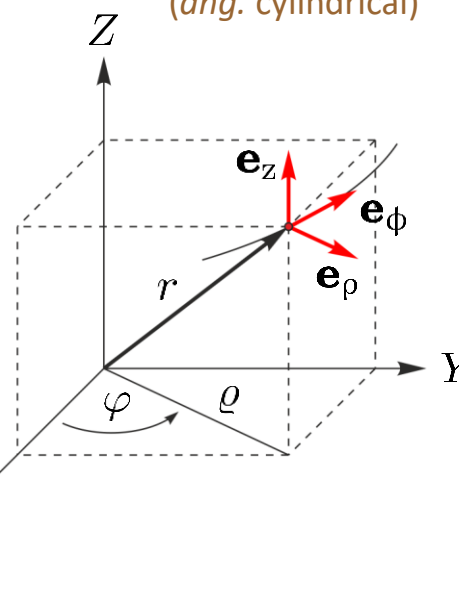
macierz obrotu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix}$$

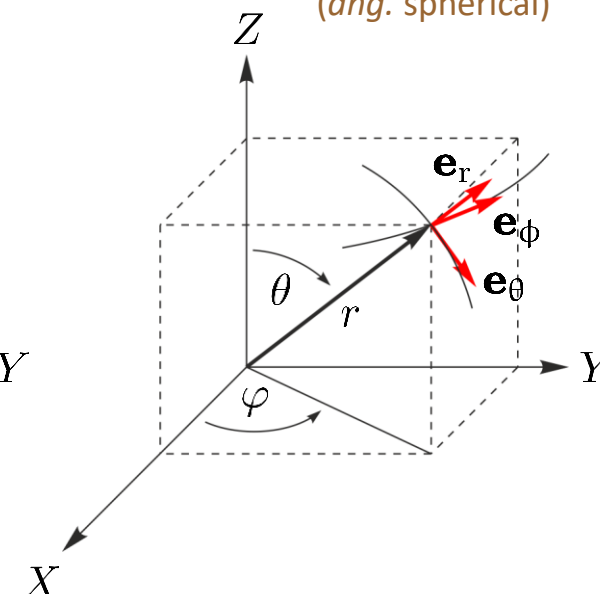
zwyczajowo wektory
bazowe zaczepione w punkcie
(wektory „podążają” za punktem)



układ **walcowy** (tylko w 3D)
(ang. cylindrical)



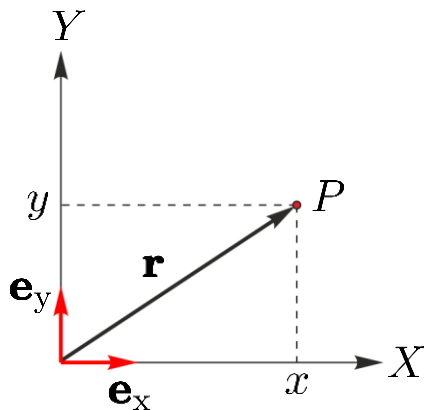
układ **sferyczny** (tylko w 3D)
(ang. spherical)



Układ biegunowy

Definicja układu

układ kartezjański (w 2D)



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y$$

„(położenie, położenie)”

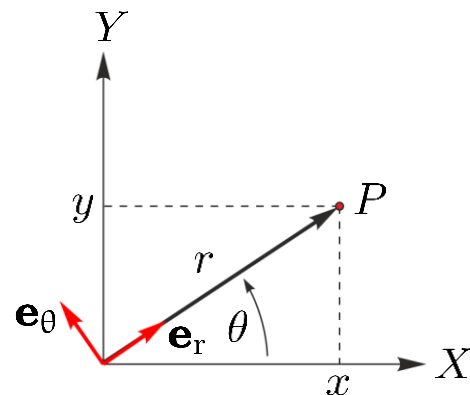


transformacja wektorów bazowych

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_y$$

układ **biegunowy** (tylko w 2D)
(ang. polar coordinate system)



„(odległość, kąt)”

transformacja współrzędnych

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

macierz obrotu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix}$$

Prędkość i przyspieszenie w układzie biegunowym

położenie (tj. wektor wodzący)

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}_r(\theta(t))$$

funkcje czasu

iloczyn funkcji

prędkość

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (r \cdot \mathbf{e}_r(\theta)) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r$$

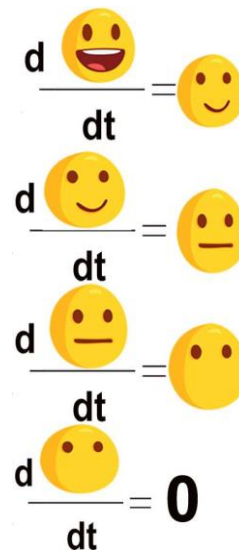
$$\left(\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right)$$

prędkość kątowa

$$= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$$

składowa **radialna**

składowa **transwersalna**
lub **azymutalna**



trzeba szybko policzyć

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \frac{d}{dt} (\cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y) = \\ &= (-\sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Układ biegunowy

prędkość

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

prędkość kątowna
 $\left(\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right)$

przyśpieszenie (robi się analogicznie)

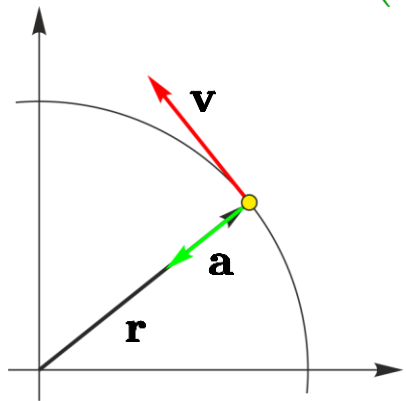
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta$$

składowa radialna

składowa transwersalna

przyśpieszenie kątowne

$$\left(\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)$$

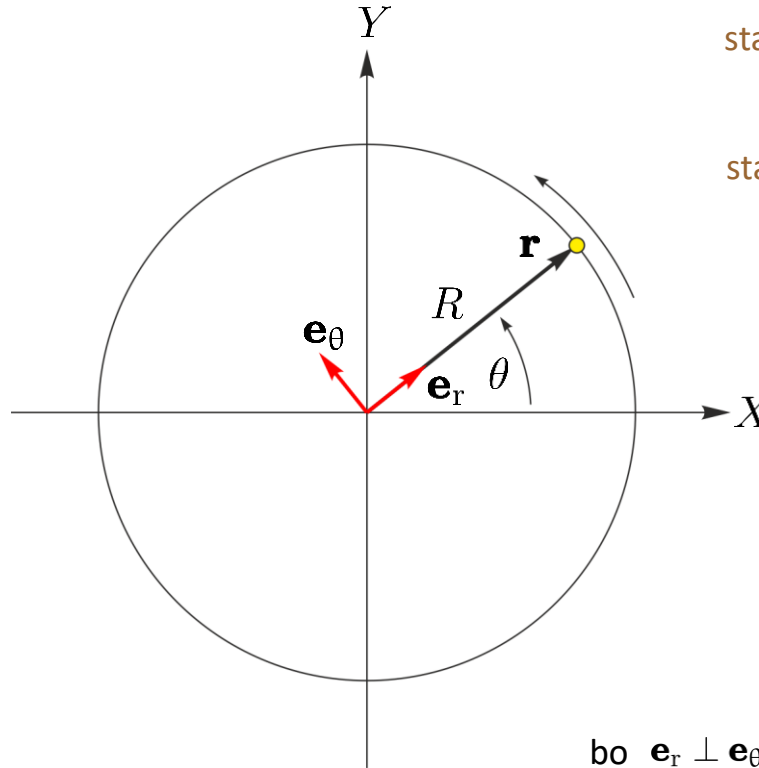


$$\mathbf{a} = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (\cancel{r\ddot{\theta}} + 2\cancel{\dot{r}\dot{\theta}}) \mathbf{e}_\theta = -\omega^2 R \mathbf{e}_r = -\omega^2 \mathbf{r}$$

bo $\ddot{r} = 0$ bo $\ddot{\theta} = 0$

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Ruch jednostajny po okręgu



stały promień (ruch po **okręgu**)

$$r = R = \text{const} \quad \mathbf{r} = R \mathbf{e}_r$$

stała prędkość kątowna (ruch **jednostajny**)

$$\omega = \text{const}$$

bo $\dot{r} = 0$

$$\mathbf{v} = \cancel{\dot{r} \mathbf{e}_r} + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \omega R \mathbf{e}_\theta \quad v = \omega R$$

bo $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$

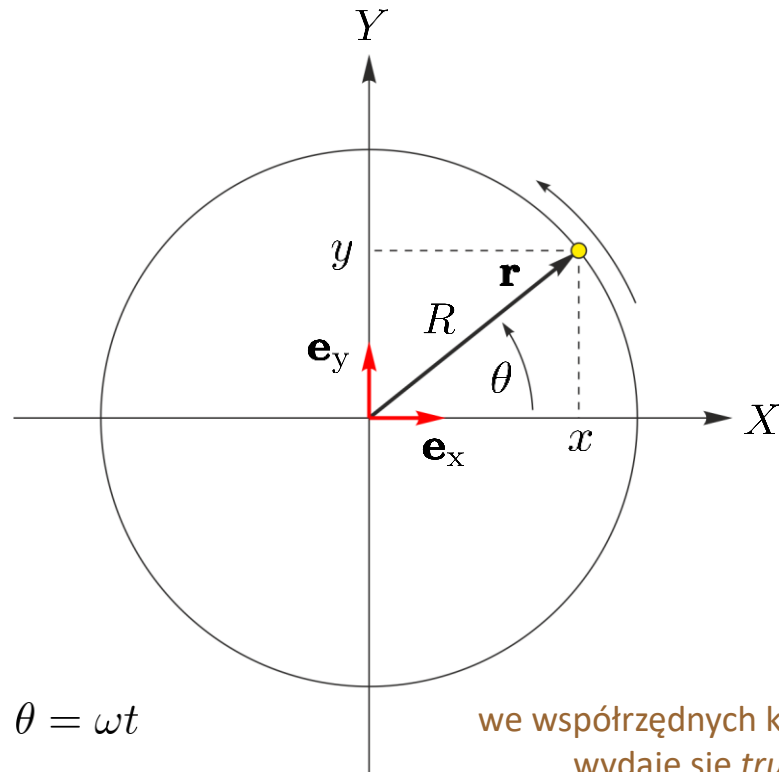
1. prędkość **prostopadła** do promienia i **styczna** do toru

$$\mathbf{a} \updownarrow \mathbf{r}$$

2. przyśpieszenie **antyrównoległe** do promienia, zawsze do środka okręgu (tzw. **przyśpieszenie dośrodkowe**)

POKAZ W3-1: styczność prędkości w ruchu po okręgu

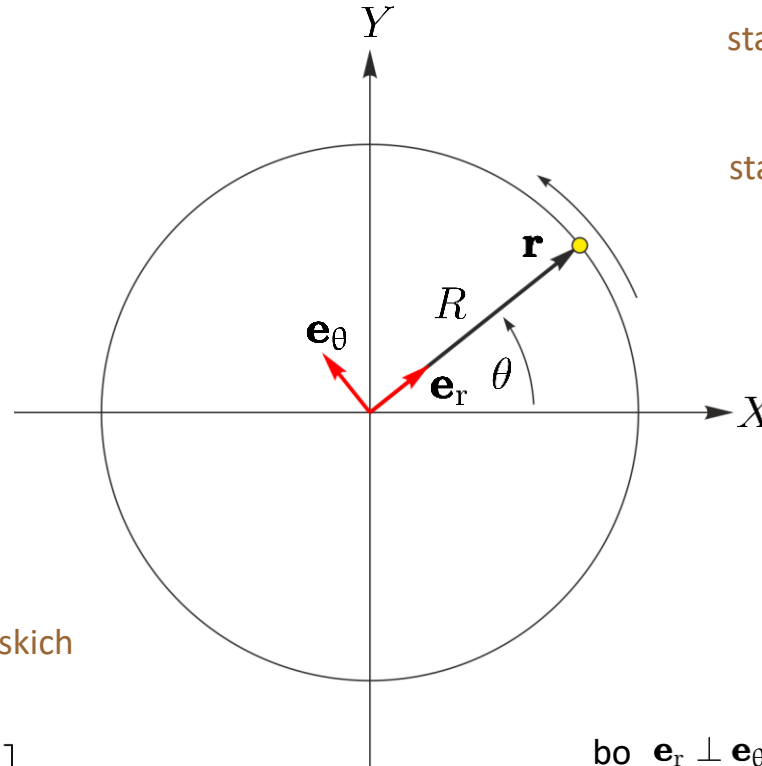
Ruch po okręgu



$$\mathbf{r} = R \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} = R [\cos(\omega t) \cdot \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \cdot \mathbf{e}_y]$$

$$\mathbf{v} = \omega R \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = -\omega^2 R \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Ruch jednostajny po okręgu



stały promień (ruch po **okręgu**)

$$r = R = \text{const} \quad \mathbf{r} = R \mathbf{e}_r$$

stała prędkość kątowa (ruch **jednostajny**)

$$\omega = \text{const}$$

$$\text{bo } \dot{r} = 0$$

$$\mathbf{v} = \cancel{\dot{r} \mathbf{e}_r} + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \omega R \mathbf{e}_\theta$$

$$\text{bo } \mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{r}$$

1. prędkość **prostopadła** do promienia i **styczna** do toru

2. przyspieszenie **antyrównoległe** do promienia, zawsze do środka okręgu (tzw. **przyspieszenie dośrodkowe**)

Ruch po okręgu

promień krzywizny toru

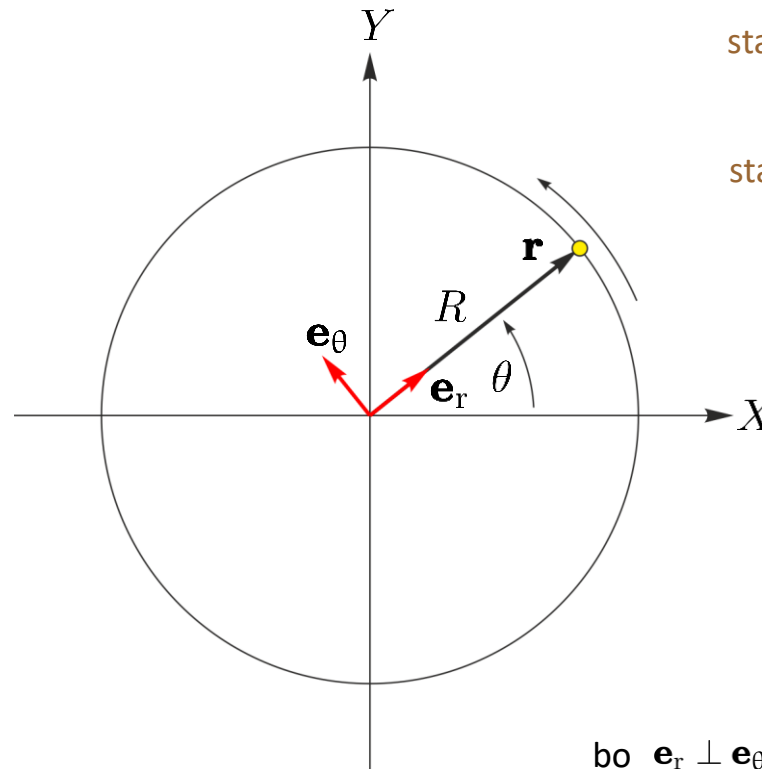
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta = -\frac{v^2}{R} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n$$

bo $\dot{v} = 0$

$\rho = R$
 $\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_e$

Ruch jednostajny po okręgu



stały promień (ruch po **okręgu**)

$$r = R = \text{const} \quad \mathbf{r} = R \mathbf{e}_r$$

stała prędkość kątowa (ruch **jednostajny**)

$$\omega = \text{const}$$

bo $\dot{r} = 0$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \omega R \mathbf{e}_\theta$$

bo $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$ $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$

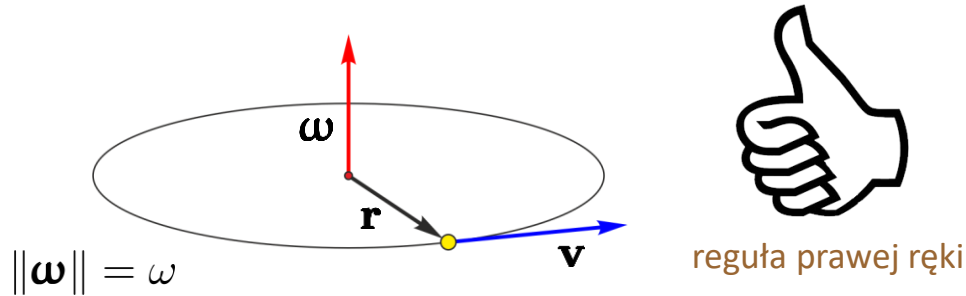
1. prędkość **prostopadła** do promienia i **styczna** do toru

$\mathbf{a} \updownarrow \mathbf{r}$ 2. przyśpieszenie **antyrownoległe** do promienia, zawsze do środka okręgu (tzw. **przyśpieszenie dośrodkowe**)

Ruch po okręgu

Prędkość kątowna jako wektor

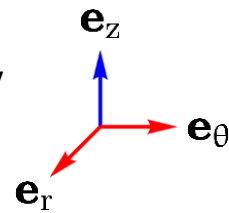
(ograniczmy się do ruchu po okręgu)



$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_r = r \dot{\theta} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r) = r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}$$

pojawia się iloczyn wektorowy

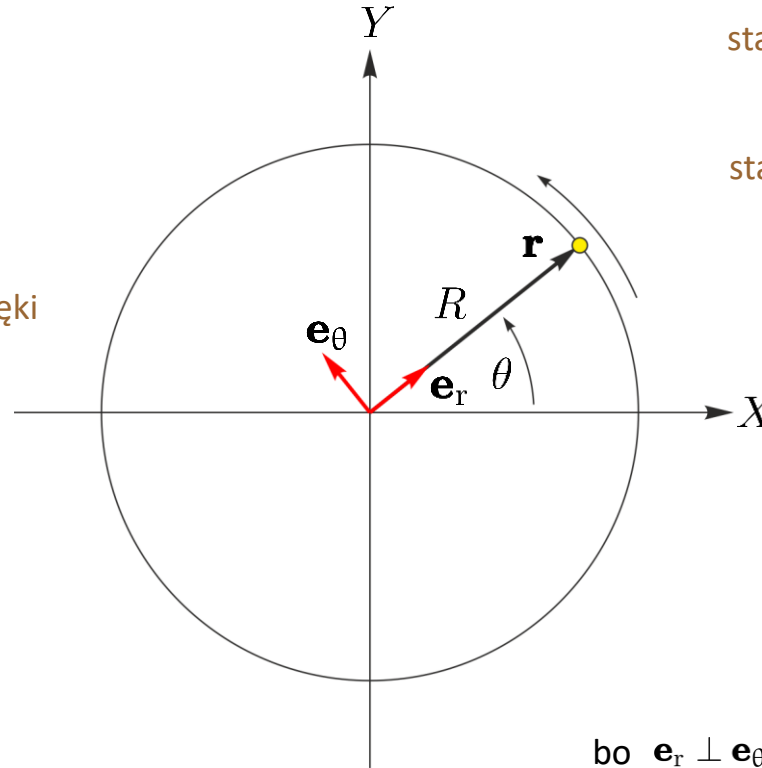
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$\mathbf{a}_t$ $\mathbf{a}_n$

Ruch jednostajny po okręgu



stały promień (ruch po **okręgu**)

$$r = R = \text{const} \quad \mathbf{r} = R \mathbf{e}_r$$

stała prędkość kątowna (ruch **jednostajny**)

$$\omega = \text{const}$$

$$\text{bo } \dot{r} = 0$$

$$\mathbf{v} = \cancel{\dot{r} \mathbf{e}_r} + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \omega R \mathbf{e}_\theta$$

$$\text{bo } \mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$$

1. prędkość **prostopadła** do promienia i **styczna** do toru

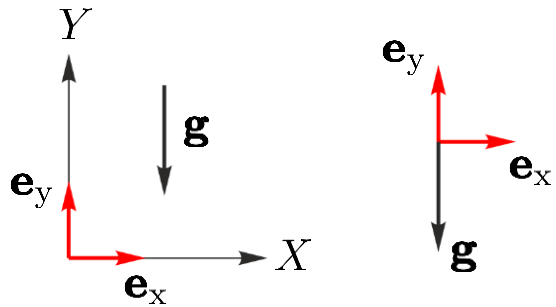
$$\mathbf{a} \updownarrow \mathbf{r}$$

2. przyspieszenie **antyrównoległe** do promienia, zawsze do środka okręgu (tzw. **przyspieszenie dośrodkowe**)

Spadek swobodny

stałe przyspieszenie ziemskie („w dół”)

$$\mathbf{a}(t) = \text{const} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} = -g \cdot \mathbf{e}_y$$



całkowanie równań ruchu

$$\textcircled{1.} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt$$

$$\textcircled{2.} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$

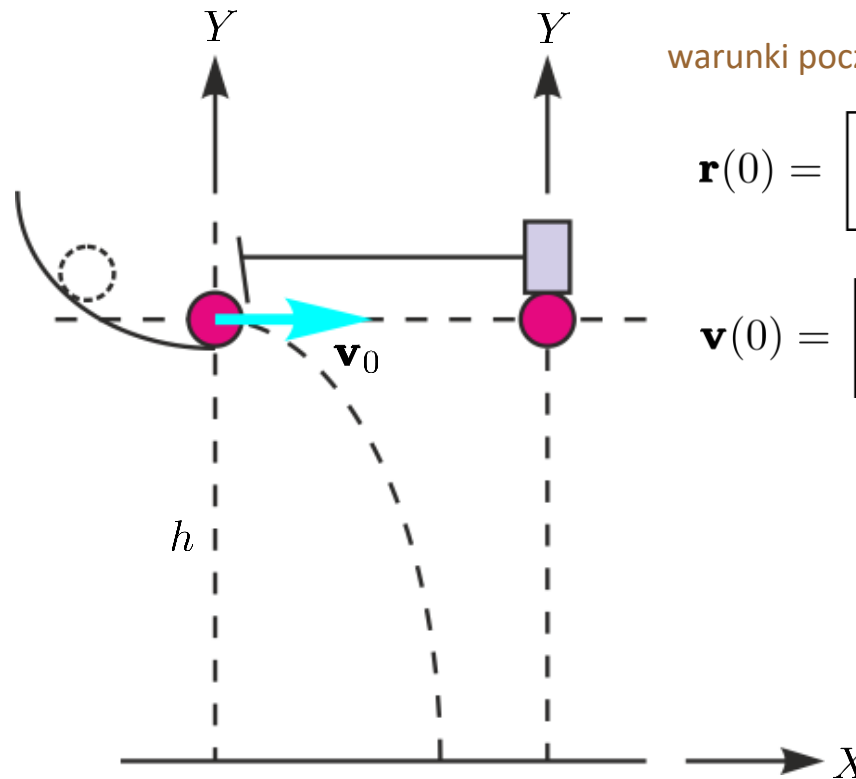
warunki początkowe (kula prawa)

$$\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{g} dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ -gt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -gt \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ h - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



POKAZ W3-2: dwie kule, spadek swobodny, rzut ukośny

Spadek swobodny

warunki początkowe (kula lewa)

$$\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

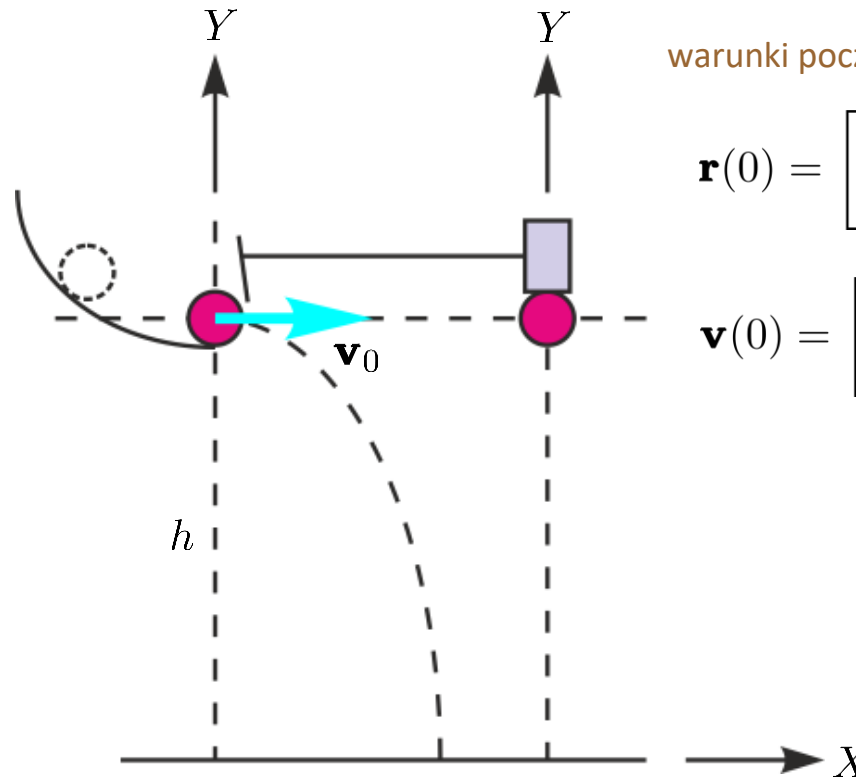
$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{g} \, dt = \\ &= \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} v_0 \\ -gt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) \, dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} v_0 \\ -gt \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} v_0 t \\ h - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

całkowanie równań ruchu

$$\textcircled{1.} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) \, dt$$

$$\textcircled{2.} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) \, dt$$



warunki początkowe (kula prawa)

$$\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

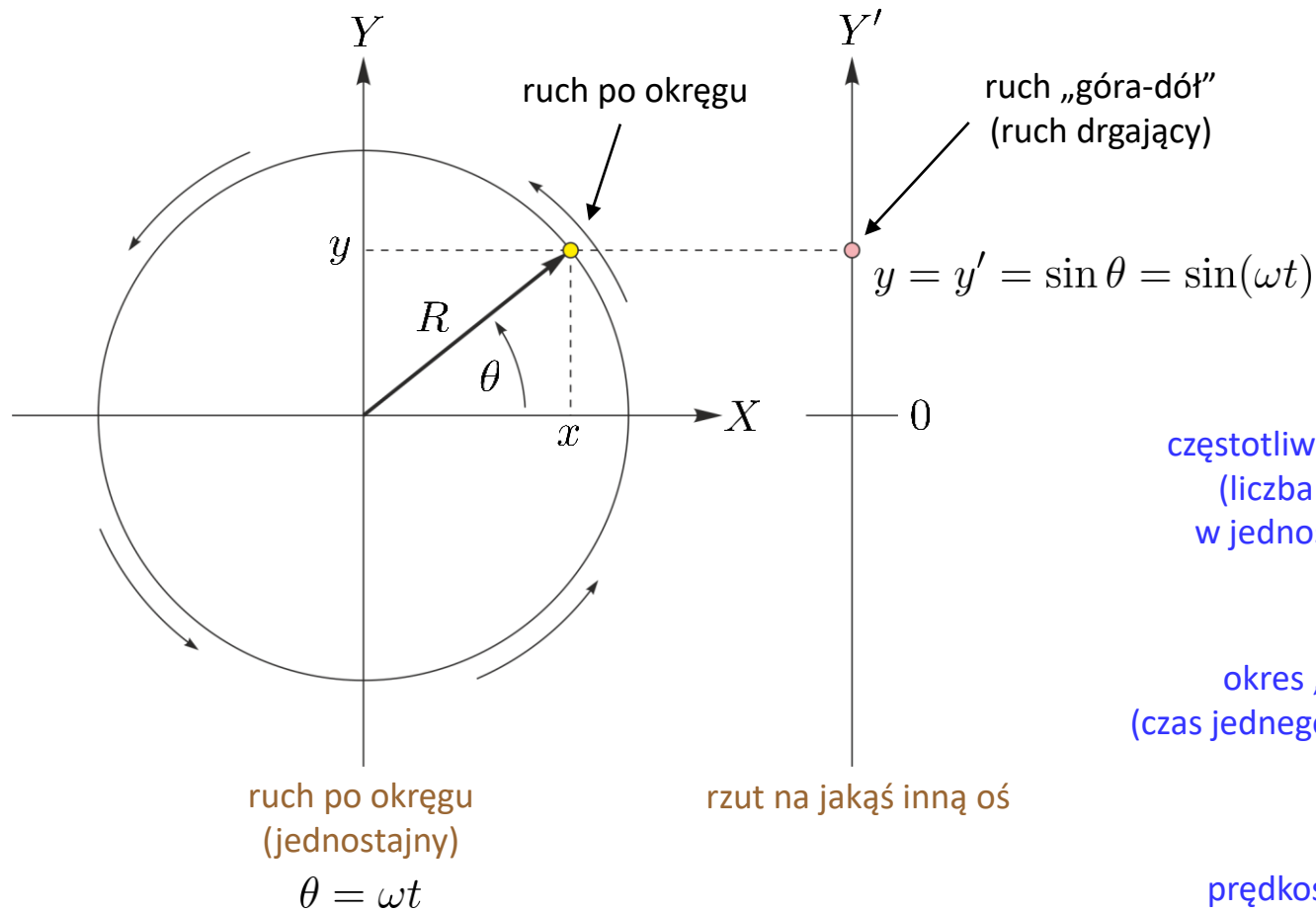
$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{g} \, dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ -gt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) \, dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -gt \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ h - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tzw. „zasada niezależności ruchów”
lub lepiej
zasada superpozycji ruchów
(„dodawania”, składania)

POKAZ W3-2: dwie kule, spadek swobodny, rzut ukośny

Ruch harmoniczny



częstotliwość obrotów
(liczba obrotów
w jednostce czasu)

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$$

częstotliwość drgań
(liczba pełnych drgań
w jednostce czasu)

okres „obrotu”
(czas jednego cyklu obrotu)

$$T = \frac{t}{n} = \frac{1}{\nu}$$

okres drgania
(czas jednego cyklu drgania)

prędkość kątowna

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

częstość (kołowa)
(drgania itp.)

POKAZ W3-3: ruch po okręgu a ruch harmoniczny, kula na sprężynie

Ruch harmoniczny

Ruch harmoniczny

ruch w 1D

może być też sinus

częstość drgań

przesunięcie fazowe

amplituda

faza

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

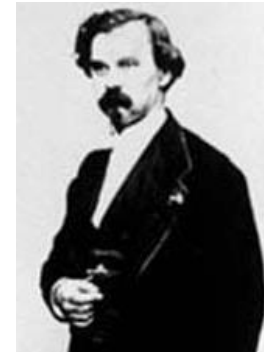
równanie
oscylatora harmonicznego

przyśpieszenie jest **wprost proporcjonalne** do wychyleńia

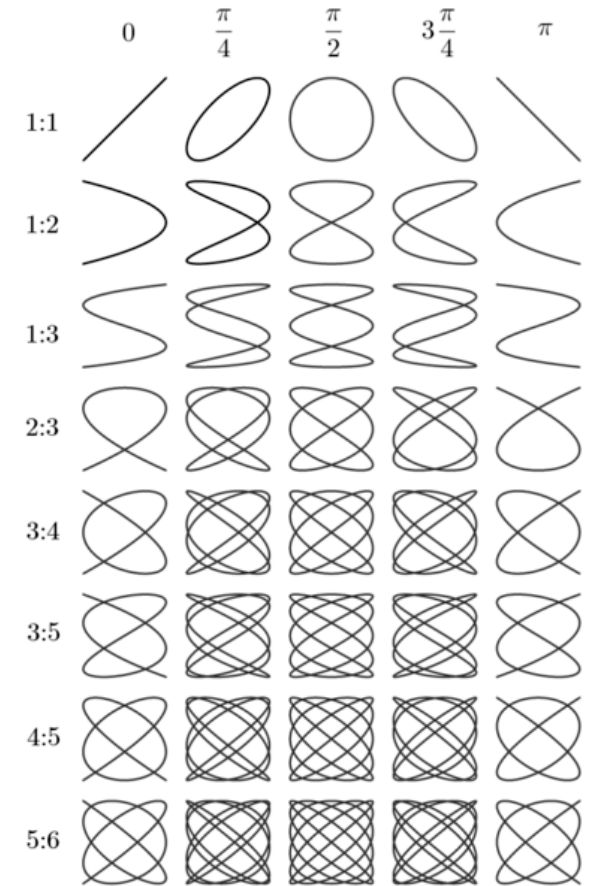
ruch w 2D

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix}$$

dwie składowe prostopadłe
(zasada superpozycji)



Jules Lissajous
(1822 – 1880)



POKAZ W3-4: figury Lissajous

😊 **DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ** 😊